Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Wintersemester 2020 - 2021

Analysis 3

3. Übungsblatt

Ausgewählte Lösungen

Hausaufgabe 3.1 [Soergel Übung 1.1.41 (Gitterpunkte und Volumen)] Gegeben sei eine kompake konvexe Teilmenge $K \subseteq \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie

$$\lambda(K) = \lim_{l \searrow 0} l^n \big| K \cap l\mathbb{Z}^n \big| = \lim_{l \searrow 0} l^n \big| \{ q \in l\mathbb{Z}^n : K \cap (q + [0,l]^n) \neq \emptyset \} \big|.$$

In Worten hängt das Maß von K also eng zusammen mit der Zahl der Gitterpunkte in K, und je feiner das Gitter wird, desto besser wird diese Approximation.

Lösung: Sei K° das Innere von K. Für jede $l > 0$ ist l^n das Maß $\lambda([0,l]^n)$ von $[0,l]^n$. Darum gilt

$$\begin{aligned} l^n \big| \{ q \in l\mathbb{Z}^n : (q + [0,l]^n) \subseteq K^\circ \} \big| &= \lambda\big(\{ q \in l\mathbb{Z}^n : (q + [0,l]^n) \subseteq K^\circ \} \big) \leq \lambda(K) \\ \leq \lambda\big(\{ q \in l\mathbb{Z}^n : (q + [0,l]^n) \cap K \neq \emptyset \} \big) &= l^n \big| \{ q \in l\mathbb{Z}^n : K \cap (q + [0,l]^n) \neq \emptyset \} \big|. \end{aligned}$$

Es reicht darum zu zeigen, dass

$$\begin{aligned} &\lambda\big(\{ q \in l\mathbb{Z}^n : (q + [0,l]^n) \cap \partial K \neq \emptyset \} \big) \\ &\quad = \lambda\big(\{ q \in l\mathbb{Z}^n : (q + [0,l]^n) \cap K \neq \emptyset \} \big) - \lambda\big(\{ q \in l\mathbb{Z}^n : (q + [0,l]^n) \subseteq K^\circ \} \big) \end{aligned}$$

gegen 0 strebt, wenn $l \searrow 0$. Weil die Schnitte $(q + [0,l]^n) \cap (q' + [0,l]^n)$ Nullmengen sind, wenn $q, q' \in l\mathbb{Z}^n$ und $q \neq q'$, gilt

$$\lambda\big(\{ q \in l\mathbb{Z}^n : (q + [0,l]^n) \cap \partial K \neq \emptyset \} \big) = \lambda \left(\bigcup_{\substack{q \in l\mathbb{Z}^n \\ (q+[0,l]^n) \cap \partial K \neq \emptyset}} (q + [0,l]^n) \right) \leq \lambda(Q_l),$$

wobei Q_l die Vereinigung von alle Teilmengen der Form $q + (-2l, 2l)^n$ mit $q \in l\mathbb{Z}^n$ und $(q + (-2l, 2l)^n) \cap \partial K \neq \emptyset$ ist. Wir werden sogar beweisen, dass

$$\lim_{l \searrow 0} \lambda(Q_l) = \lambda(\partial K) \quad \text{und} \quad \lambda(\partial K) = 0.$$

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge, sodass $\partial K \subseteq U$. Wir definieren $d : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ als die Distanz zum ∂U

$$d(x) := \inf_{y \in \partial U} \|x - y\| \qquad (u \in \mathbb{R}^n).$$

Die Abbildung d ist stetig. Weil K kompakt ist, ist auch ∂K kompakt. Es folgt, dass $d|_{\partial K}$ sein Minimum in einem Punkt $x_0 \in \partial K$ annimt. Wir behaupten, dass $d(x_0) > 0$. Sonnst folgt $x_0 \in \partial U$, da die Menge ∂U abgeschlossen ist. Da U offen ist, gilt $U \cap \partial U = \emptyset$. Es folgt, dass $x_0 \notin U \supseteq K$. Dies ist ein Widerspruch. Wir schreiben $r := d(x_0)$.

Bemerke, dass

$$K \subseteq \bigcup_{x \in \partial K} B(x, r) \subseteq U.$$

Sei $l > 0$ so klein, dass $4l\sqrt{n} < r$. Dann gilt

$$\sup_{x\in\partial K}\sup_{y\in Q_l}\|x-y\| < 4l\sqrt{n} < r$$

und darum

$$Q_l \subseteq \bigcup_{x\in\partial K} B(x,r).$$

Wir haben jetzt beweisen dass für jede offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$, mit $\partial K \subseteq U$, es ein $l > 0$ gibt, sodass

$$\partial K \subseteq Q_l \subseteq U. \tag{1}$$

Weil das Lebesguemaß regulär ist, gilt

$$\lambda(\partial K) = \inf_{\substack{U \text{offen} \\ \partial K\subseteq U}} \lambda(U).$$

Aus (1) folgt, dass das Infimum über die offene Mengen Q_l genommen werden kann, also

$$\lambda(\partial K) = \inf_{l>0}\lambda(Q_l).$$

Wenn $0 < l < l'$, dann $Q_l \subseteq Q_{l'}$. Es folgt

$$\lambda(\partial K) = \lim_{l\searrow 0}\lambda(Q_l).$$

Zum Schluss beweisen wir, dass ∂K eine Nullmenge ist. Weil echte affine Unterräume Nullmengen sind, ist K eine Nullmenge, wenn K enthalten is in einem echten affinen Unterraum. Nehme an, dass K nicht enthalten in einem echten affinen Unterraum ist. Nach eine Verschiebung dürven wir annehmen, dass $0 \in K$. Da K nicht erhalten ist in einem Unterraum, gibt es eine Basis $e_1, \dots, e_n$ von Elementen in K. Weil K konvex ist, ist die Konvexe Hülle von $e_1, \dots, e_n$ enthalten in K. Das Innere von diese Konvexe Hülle ist nicht leer und darum ist eine offene Ball B enthalten in K. Nach eine weitere Verschiebung dürven wir annehmen, dass 0 den Mittelpunkt von B ist. Sei $k \in K$. Wegen Konvexität ist für jede $0 < t < 1$ der offener Ball $tk + (1-t)B$ enthalten in K. Es folgt, dass $tK \subseteq K^\circ$ für jede $0 < t < 1$ und damit

$$\lambda(K) = \lim_{t\nearrow 1} t^n\lambda(K) = \lim_{t\nearrow 1}\lambda(tK) \le \lambda(K^\circ) \le \lambda(K).$$

Es folgt, $\lambda(K^\circ) = \lambda(K)$ und darum

$$\lambda(\partial K) = \lambda(K) - \lambda(K^\circ) = 0.$$

Hausaufgabe 3.4 [Soergel Übung 1.4.39]

(a) Man zeige, daß jede linksseitig stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ meßbar ist.

(b) Man zeige, daß jede in jeder Variablen monoton wachsende und linksseitig stetige Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ meßbar ist.

Lösung:

(a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine linksseitig stetige Funktion. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f\Big(\frac{\lfloor nx\rfloor}{n}\Big).$$

Die Funktion f_n ist konstant auf Mengen der form $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n})$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Jedes Urbild $f_n^{-1}(A)$ einer Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ ist darum eine abzählbare Vereinigung halboffener Intervallen. Es folgt, dass f_n meßbar ist.

Für jede $x \in \mathbb{R}$ ist $\left(\frac{\lfloor nx \rfloor}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Aufsteigende Folge mit Grenzwert x. Da f linksseitig stetig ist, folgt

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Nach Satz 1.4.27 (3) ist f meßbar.

(b) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine in jeder Variablen monoton wachsende und linksseitig stetige Funktion. Für $m \in \mathbb{N}^n$ definieren wir

$$f_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto f\Big(\frac{\lfloor m_1 x_1 \rfloor}{m_1}, \dots, \frac{\lfloor m_n x_n \rfloor}{m_n}\Big).$$

Die Abbildung f_m ist konstant auf Mengen der form $[\frac{k_1}{m_1}, \frac{k_1+1}{m_1}) \times \cdots \times [\frac{k_n}{m_n}, \frac{k_n+1}{m_n})$. Wie in (a) folgt, dass f_m meßbar ist. Da $\left(\frac{\lfloor mx_1 \rfloor}{m}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Aufsteigende Folge mit Grenzwert x_1 und f in jeder Variabele linksseitig stetig ist, gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n$

$$\lim_{m_1\to\infty} f_m(x) = f^1_{(m_2,\dots,m_n)}(x),$$

wobei $f^1_{(m_2,\dots,m_n)} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeben ist durch

$$f^1_{(m_2,\dots,m_n)}(x) = f\Big(x_1, \frac{\lfloor m_2 x_2 \rfloor}{m_2}, \dots, \frac{\lfloor m_n x_n \rfloor}{m_n}\Big) \qquad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Nach Satz 1.4.27 (3) ist f^1_m für alle $m \in \mathbb{N}^{n-1}$ meßbar. Da $\left(\frac{\lfloor mx_2 \rfloor}{m}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Aufsteigende Folge mit Grenzwert x_2 ist, gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n$

$$\lim_{m_1\to\infty} f^1_m(x) = f^2_{(m_2,\dots,m_{n-1})}(x),$$

wobei $f^2_{(m_2,\dots,m_{n-1})} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeben ist durch

$$f^2_{(m_2,\dots,m_{n-1})}(x) = f\Big(x_1, x_2, \frac{\lfloor m_3 x_2 \rfloor}{m_3}, \dots, \frac{\lfloor m_n x_n \rfloor}{m_n}\Big) \qquad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Nach Satz 1.4.27 (3) ist f^2_m für alle $m \in \mathbb{N}^{n-2}$ meßbar. Nach n-fache Widerholung dieses Prozesses folgern wir, dass f meßbar ist.