Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Wintersemester 2020 - 2021

Analysis 3

3. Übungsblatt

Ausgewählte Lösungen

Präsenzaufgabe 3.1 Beweisen Sie den Satz von Steinhaus: Für eine Lebesgue-messbare Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ mit Lebesgue-Maß $\lambda(A) > 0$ ist die Menge

$$A - A = \{a_1 - a_2 : a_1, a_2 \in A\}$$

eine Umgebung von 0.

Lösung: Ohne Einschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, dass $0 < \lambda(A) < \infty$. Weil das Lebesguemass regulär ist, gibt es für jede $\epsilon > 0$ eine kompakte Teilmenge $K \subseteq A$ und eine offen Teilmenge $U \supseteq A$, sodass $\lambda(U \setminus K) < \epsilon$. Da $\lambda(A) > 0$ können wir ϵ so klein wählen (und damit K so groß) that $\lambda(K) > \epsilon$. Dann

$$\lambda(U) = \lambda(K) + \lambda(U \setminus K) < \lambda(K) + \epsilon < 2\lambda(K). \tag{1}$$

Wir schreiben $B(x, r)$ für die offene Ball mit Mittelpunkt $x \in \mathbb{R}^n$ und Radius $r > 0$. Weil $K \subseteq U$ und U offen ist, gibt es für jede $k \in K$ ein $r_k > 0$, sodass $B(k, 2r_k) \subseteq U$. Jetzt ist $\{B(k, r_k) : k \in K\}$ eine offene Überdeckung von K. Da K kompakt ist, gibt es eine endliche Teilmenge $E \subseteq K$, sodass

$$K \subseteq \bigcup_{k \in E} B(k, r_k).$$

Sei $r := \min\{r_k : k \in E\} > 0$. Es gilt

$$\begin{aligned} K + B(0, r) &\subseteq \left(\bigcup_{k \in E} B(k, r_k) \right) + B(0, r) = \bigcup_{k \in E} \left(B(k, r_k) + B(0, r) \right) \\ &= \bigcup_{k \in E} B(k, r_k + r) \subseteq \bigcup_{k \in E} B(k, 2r_k) \subseteq U. \end{aligned}$$

Wenn $x \in B(0, r)$ und $K \cap (x + K) = \emptyset$, dann

$$2\lambda(K) = \lambda(K) + \lambda(x + K) = \lambda\big(K \cup (x + K)\big) \leq \lambda(U).$$

Dies ist im Widerspruch zu (1). Wir folgern, dass für alle $x \in B(0, r)$ es $k_1, k_2 \in K$ gibt, sodass $x + k_1 = k_2$ und damit $x = k_2 - k_1$. Es folgt

$$B(0, r) \subseteq K - K \subseteq A - A.$$