Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Wintersemester 2020 - 2021

Analysis 3

6. Übungsblatt

Ausgewählte Lösungen

Hausaufgabe 6.2 Beweisen Sie: Für jeden Maßraum X ist der normierten Vektorraum $L^\infty(X)$ vollständig. Jede konvergente Folge in $L^\infty(X)$ besitzt des weiteren eine Teilfolge, die fast überall punktweise gegen die Grenzfunktion konvergiert.

Lösung: Sei $(X,\mathcal{M},\mu)$ einen Maßraum und seien $f_n : X \to \mathbb{C}$ meßbare und beschränkte Repräsentanten der Glieder einer Cauchy-Folge $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $L^\infty(X)$. Für $m,n,k \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$A^k_{m,n} := \Big\{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| \geq \frac{1}{k}\Big\}.$$

Die Mengen $A^k_{m,n}$ sind Urbilder von meßbare Funktionen und damit meßbar. Da die f_n Repräsentanten der Glieder einere Cauchy-Folge sind, gibt es für jede $k \in \mathbb{N}$ ein $N_k \in \mathbb{N}$, sodass $\mu(A^k_{m,n}) = 0$ für alle $m,n > N_k$. Sei

$$A = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{\substack{m,n\in\mathbb{N}\\ m,n>N_k}} A^k_{m,n}.$$

A ist die abzählbare Vereinigung von Nullmengen und damit selbst meßbar und eine Nullmenge. Setze $X^\circ = X \setminus A$. Für jede $x \in X^\circ$ gilt

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{1}{k} \qquad (n,m,k \in \mathbb{N} \text{ mit } n,m > N_k). \tag{1}$$

Für jede $x \in X^\circ$ ist die Folge $\big(f_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{C}$. Insbesondere ist die Folge konvergent. Wir definieren

$$f : X \to \mathbb{C}, \quad x \mapsto \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) & (x \in X^\circ), \\ \\ 0 & (x \in A = X \setminus X^\circ). \end{cases}$$

Aus (1) folgt, dass die Folge $\big(f_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ uniform auf X° gegen f konvergiert. Nach Satz 1.4.27 ist $f\big|_{X^\circ}$ meßbar. Da $A = X \setminus X^\circ$ auch meßbar ist, folgt, dass f meßbar ist. Es gilt

$$\sup_{x\in X^\circ} |f(x)| \leq \Big(\sup_{x\in X^\circ} |f(x) - f_n(x)|\Big) + \Big(\sup_{y\in X^\circ} |f_n(y)|\Big).$$

Da die Funktionen f_n beschränkt sind, gilt für hinreiched große $n \in \mathbb{N}$

$$\sup_{x\in X} |f(x)| = \sup_{x\in X^\circ} |f(x)| \leq 1 + \sup_{y\in X^\circ} |f_n(y)| < \infty.$$

Es folgt, dass die Funktion f einen Repräsentanten von einem Element $\phi \in L^\infty(X)$ ist. Zum Schluß, sei $\epsilon > 0$. Wenn $n \in \mathbb{N}$ so groß ist, dass

$$\sup_{x\in X_0} |f(x) - f_n(x)| < \epsilon,$$

dann folgt aus $\mu(A) = 0$,

$$\begin{aligned}\|\phi - \phi_n\|_\infty &= \sup\Big\{c \geq 0 : \mu\big(\{x \in X : |f(x) - f_n(x)| > c\}\big) > 0\Big\} \\ &= \sup\Big\{c \geq 0 : \mu\big(\{x \in X^\circ : |f(x) - f_n(x)| > c\}\big) > 0\Big\} \leq \epsilon.\end{aligned}$$

Hausaufgabe 6.3 (Soergel, Übung 2.3.13) Ist (X, μ) ein Maßraum und $E \subseteq X$ eine meßbare Teilmenge endlichen Maßes, so liefert für alle $p \in [1, \infty]$ die Einschränkung von Funktionen eine stetige Abbildung $L^p(X) \to L^1(E)$.

Lösung: Sei $\phi \in L^p(X)$ und sei f einen meßbaren Repräsentanten von ϕ. Setze

$$g : X \to \mathbb{C}, \quad x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\overline{f(x)}}{|f(x)|} & \big(f(x) \neq 0 \text{ und } x \notin E\big) \\ 0 & \big(f(x) = 0 \text{ oder } x \notin E\big). \end{cases}$$

Sei $q = \frac{p}{p-1}$. Es gilt

$$\int_X |g|^q \mu = \int_{E \setminus f^{-1}(\{0\})} \mu \leq \mu(E) < \infty.$$

Dies zeigt, dass g einen Repräsentanten von einem Element $\psi \in L^q(X)$ ist. Nach der Hölder Ungleichung ist $\phi\psi \in L^1(X)$ und

$$\|\phi\|_p \|\psi\|_q \geq \int_E \phi\psi\, \mu = \int_E fg\, \mu = \int_E |f|\, \mu = \int_E |\phi|\, \mu.$$

Es folgt, dass $\phi\big|_E \in L^1(E)$ und

$$\|\phi\big|_E\|_{L^1(E)} \leq \|\phi\|_p \|\psi\|_q \leq \mu(E)^{\frac{1}{q}} \|\phi\|_p.$$

Dies beweist, dass die Abbildung $L^p(X) \to L^1(E)$, $\phi \mapsto \phi\big|_E$ stetig ist.