Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Wintersemester 2020 - 2021

Analysis 3

6. Übungsblatt

Ausgewählte Lösungen

Präsenzaufgabe 6.2 Sei $G = \{\Phi_t : t \in \mathbb{R}\}$ eine glatte Einparametergruppe von Diffeomorphismen auf $\mathbb{R}^n$, d.h. für jede $t \in \mathbb{R}$ ist $\Phi_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein Diffeomorphismus, sodass

$$\Phi_0 = \mathrm{Id}$$

und

$$\Phi_s \circ \Phi_t = \Phi_{s+t} \qquad (s, t \in \mathbb{R}),$$

und die Abbildung

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad (t, x) \mapsto \Phi_t(x)$$

glatt ist. Sei $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ das Vektorfeld, das zu G gehört, d.h. das Vektorfeld, sodass

$$\partial_t \Phi_t(x) = \phi \circ \Phi_t(x) \qquad (t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n).$$

(a) Sei K eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine glatte Abbildung. Beweisen Sie die Identität

$$\frac{d}{dt} \int_{\Phi_t(K)} f(x)\, dx = \int_{\Phi_t(K)} \Big(Df(x)\phi(x) + f(x)\mathrm{div}\phi(x) \Big)\, dx.$$

(b) Zeigen Sie, dass die folgende Aussagen äquivalent sind.

(i) Das Lebesguemaß ist G-invariant.

(ii) $\mathrm{vol}_n\big(\Phi_t(K)\big) = \mathrm{vol}_n\big(K\big)$ für alle kompakte Teilmengen K von $\mathbb{R}^n$.

(iii) $\mathrm{div}\phi = 0$.

Lösungen:

(a) Die Transformationsformel liefert

$$I(t) := \int_{\Phi_t(K)} f(x)\, dx = \int_K f\big(\Phi_t(x)\big) |\det D\Phi_t(x)|\, dx.$$

Da K kompakt und die Integrant glatt in t und x ist, sind die Bedingungen in Übung 1.6.15 im Skript von Soergel erfüllt. Es folgt, dass $t \mapsto I(t)$ glatt ist und

$$\frac{d}{dt} I(t) = \int_K \frac{\partial}{\partial t} \Big(f\big(\Phi_t(x)\big) |\det D\Phi_t(x)| \Big)\, dx.$$

Bemerke, dass $\det D\Phi_t(x) \neq 0$ für alle $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Da $\det D\Phi_0 = \det \mathrm{Id} = 1$ folgt $D\Phi_t(x) > 0$ für alle $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Weil

$$\frac{\partial}{\partial t} f\big(\Phi_t(x)\big) = Df\big(\Phi_t(x)\big)\phi\big(\Phi_t(x)\big)$$

und

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\det D\Phi_t(x) &= \frac{\partial}{\partial s}\det D\Phi_{t+s}(x)\Big|_{s=0}\\ &= \frac{\partial}{\partial s}\det D\Phi_s\big(\Phi_t(x)\big)\det D\Phi_t(x)\Big|_{s=0}\\ &= \mathrm{tr}D\phi\big(\Phi_t(x)\big)\det D\Phi_t(x)\\ &= \mathrm{div}\phi\big(\Phi_t(x)\big)\det D\Phi_t(x),\end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}I(t) &= \int_K Df\big(\Phi_t(x)\big)\phi\big(\Phi_t(x)\big)\det D\Phi_t(x) + f\big(\Phi_t(x)\big)\mathrm{tr}D\phi\big(\Phi_t(x)\big)\det D\Phi_t(x)\,dx\\ &= \int_{\Phi_t(K)} Df(x)\phi(x) + f(x)\mathrm{tr}D\phi(x)\,dx.\end{aligned}$$

Für die zweite Gleichheit haben wir die Transformationsformel nochmals verwendet.

(b) Wir setzen für f die konstante Funktion 1 ein und bekommen.

$$\frac{d}{dt}\mathrm{vol}_n\big(\Phi_t(K)\big) = \int_{\Phi_t(K)}\mathrm{div}\phi(x)\,dx. \tag{1}$$

$(i) \Rightarrow (ii)$: Kompakte Mengen sind meßbar. Nach Annahme ist das Lebesguemaß G-invariant. Darum gilt

$$\mathrm{vol}_n\big(\Phi_t(K)\big) = \mathrm{vol}_n(K) \qquad (t\in\mathbb{R}, K\subseteq\mathbb{R}^n \text{ kompakt}).$$

$(ii) \Rightarrow (iii)$: Wenn $\mathrm{div}\phi \neq 0$, dann gibt es ein $\epsilon > 0$ und einen abgeschlossenen Ball B, sodass $|\mathrm{div}\phi(x)| > \epsilon$ für alle $x \in B$. Dann gilt

$$\Big|\int_B \mathrm{div}\phi(x)\,dx\Big| > \epsilon\mathrm{vol}_n(B).$$

Dies ist im Widerspruch zu (1). Es folgt $\mathrm{div}\phi = 0$.
$(iii) \Rightarrow (i)$: Nach (1) gilt $\mathrm{vol}_n\big(\Phi_t(K)\big) = \mathrm{vol}_n(K)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und kompakte Teilmengen $K \subseteq \mathbb{R}^n$.

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ meßbar. Jede kompakte Teilmenge von $\Phi_t(A)$ is der Form $\Phi_t(K)$ mit $K \subseteq A$ kompakt. Nach Satz 1.1.28 gilt

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}_n(A) &= \sup_{\substack{K\subseteq A\\ K \text{ kompakt}}}\mathrm{vol}_n(K) = \sup_{\substack{K\subseteq A\\ K \text{ kompakt}}}\mathrm{vol}_n\big(\Phi_t(K)\big) = \sup_{\substack{K\subseteq \Phi_t(A)\\ K \text{ kompakt}}}\mathrm{vol}_n(K)\\ &= \mathrm{vol}_n\big(\Phi_t(A)\big).\end{aligned}$$

Es folgt, dass das Lebesguemaß G-invariant ist.

Präsenzaufgabe 6.3 Sei $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ eine symmetrische positiv definite Matrix. Zeigen Sie, dass

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}\langle x, Ax\rangle}\,dx = \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\det A}}$$

Lösungen: Da A symmetrisch ist, gibt es eine orthonormale Basis $v_1,\ldots,v_n$ von Eigenvektoren von A. Wirs schreiben $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ für die Eigenwerten von $v_1,\ldots,v_n$.

Da A positiv definit ist, sind alle Eigenwerten $\lambda_i > 0$. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit dürven wir annehmen, dass λ_1 die kleinste Eigenwert ist. Dann

$$0 \leq e^{-\frac{1}{2}\langle x, Ax\rangle} \leq e^{-\frac{1}{2}\lambda_1 \|x\|^2} \qquad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Weil $x \mapsto e^{-\lambda\|x\|^2}$ integrierbar ist für alle $\lambda > 0$, ist auch $x \mapsto e^{-\frac{1}{2}\langle x, Ax\rangle}$ integrierbar. Aus dem Satz von Fubini folgt

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}\langle x, Ax\rangle}\, dx &= \int_{\mathbb{R}v_1} \cdots \int_{\mathbb{R}v_n} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \lambda_i \|x_i\|^2}\, dx_n \ldots dx_1 \\
&= \prod_{i=1}^n \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}\lambda_i x^2}\, dx \right) \\
&= (2\pi)^{\frac{n}{2}} \prod_{i=1}^n \lambda_i^{-\frac{1}{2}} \\
&= \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\det A}}.
\end{aligned}$$