Analysis 3

7. Übungsblatt

Präsenzaufgabe 7.1 Es sei $(X, \mathcal{M})$ ein Messraum sowie μ und ν zwei Maße auf X . Das Maß ν heißt *absolut stetig* bezüglich μ , in Zeichen $\nu \ll \mu$, wenn jede μ -Nullmenge auch eine ν -Nullmenge ist.

(a) Sei $f : X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine nicht-negative meßbare Funktion. Beweisen Sie, dass

$$\nu : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad A \mapsto \int_A f \mu$$

ein Maß ist. Beweisen Sie, dass ν absolut stetig bezüglich μ ist.

Ziel dieser Aufgabe ist die Umkehrung dieser Aussage zu beweisen: *der Satz von Radon-Nikodym*. Der Satz lautet wie folgt. Sei μ ein σ -endliches Maß auf dem Messraum $(X, \mathcal{M})$ und sei ν ein σ -endliches Maß, welches absolut stetig bezüglich μ ist. Dann existiert eine nicht-negative messbare Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, sodass

$$\nu(A) = \int_A f \mu \quad (A \in \mathcal{M}).$$

Ist f' eine weitere Funktion mit dieser Eigenschaft, so stimmt sie μ -fast überall mit f überein.

Nehmen Sie zuerst an, dass μ und ν endliche Maße sind.

(b) Betrachten Sie den Hilbertraum $\mathcal{H} = L^2(X, \mu + \nu)$, sowie die Abbildung

$$I : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \phi \mapsto \int_X \phi \mu.$$

Beweisen Sie, dass I ein stetiges lineares Funktional auf $\mathcal{H}$ ist.

(c) Beweisen Sie mit Hilfe von dem Darstellungssatz von Riesz, dass es ein $g \in \mathcal{H}$ gibt, sodass

$$I(\phi) = \int_X g \phi (\mu + \nu) \quad (\phi \in \mathcal{H}).$$

(d) Beweisen Sie, dass μ -fast überall $g > 0$ gilt. Folgern Sie, dass auch ν -fast überall $g > 0$.

(e) Sei $\chi : X \rightarrow \mathbb{R}_{> 0}$ einen Repräsentanten von g . Betrachten Sie die Abbildung

$$f : X \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1 - \chi(x)}{\chi(x)}.$$

Zeigen Sie, dass f meßbar ist und beweisen Sie die Identität

$$\nu(A) = \int_A f \mu \quad (A \in \mathcal{M}).$$

(f) Beweisen Sie, dass f μ -fast überall nicht-negativ ist.

(g) Beweisen Sie die Eindeutigkeit: Ist f' eine weitere Funktion mit der Eigenschaft

$$\nu(A) = \int_A f' \mu \quad (A \in \mathcal{M}),$$

so stimmt f' μ -fast überall mit f überein.

Jetzt beweisen wir den Satz von Radon-Nikodym im allgemeinen Fall, wobei μ und ν σ -endlich, aber nicht notwendig endlich, sind.

(h) Zeigen Sie, dass es für jede $E \in \mathcal{M}$ mit $\mu(E), \nu(E) < \infty$ eine nicht-negative meßbare Funktion f_E gibt, mit

$$\nu|_E(A) = \int_A f_E \mu|_E \quad (A \in \mathcal{M}, A \subseteq E).$$

(i) Seien $E_1, E_2 \in \mathcal{M}$ mit $\mu(E_{1,2}), \nu(E_{1,2}) < \infty$. Zeigen Sie

$$f_{E_1}|_{E_1 \cap E_2} = f_{E_2}|_{E_1 \cap E_2} \quad \mu|_{E_1 \cap E_2} - \text{fast überall.}$$

(j) Folgern Sie den Satz von Radon-Nikodym.

Hausaufgabe 7.1 Sei $(X, \mathcal{M})$ einen Maßraum. Eine Abbildung $\nu : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt ein *komplexes Maß* falls

$$\nu(\emptyset) = 0 \quad (1)$$

und

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\nu(A_k)| < \infty \quad \text{und} \quad \nu\left(\bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu(A_k) \quad (2)$$

für alle Folgen $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von paarweisen disjunkten meßbaren Teilmengen von X .

(a) Sei ν ein komplexes Maß auf X . Zeigen Sie, dass es Maße $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4$ auf X gibt, sodass

$$\nu(A) = \nu_1(A) - \nu_2(A) + i\nu_3(A) - i\nu_4(A) \quad (A \in \mathcal{M}).$$

Hinweis: Sie dürfen benützen, dass es ein endliches Maß $|\nu|$ gibt mit

$$|\nu|(A) \geq |\nu(A)| \quad (A \in \mathcal{M}).$$

Ein Beispiel ist die sogenannte totale Variation von ν , welche für $A \in \mathcal{M}$ gegeben ist durch

$$|\nu|(A) = \sup \sum_{n=1}^{\infty} |\nu(E_i)|$$

*wobei das Supremum genommen wird über alle Partitionen $\{E_i : i \in \mathbb{N}\}$ von A mit $E_i \in \mathcal{M}$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Die genannten Eigenschaften von $|\nu|$ folgen aus dem Theorem 6.2 und 6.4 in dem Buch *Real and complex analysis* von Rudin.*

Betrachten Sie jetzt die Abbildungen

$$\frac{1}{2}(|\nu| \pm \operatorname{Re} \nu) : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \frac{1}{2}(|\nu| \pm \operatorname{Im} \nu) : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Sei μ ein σ -endliches Maß auf X . Ein komplexes Maß ν heißt *absolut stetig* bezüglich μ , wenn $\nu(A) = 0$ für jede μ -Nullmenge A .

(b) Beweisen Sie den *Satz von Radon-Nikodym für komplexe Maße*: Sei ν ein komplexes Maß, das absolut stetig bezüglich μ ist. Dann existiert eine μ -integrierbare Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{C}$, sodass

$$\nu(A) = \int_A f \, \mu \quad (A \in \mathcal{M}).$$

Hinweis: Bemerken Sie, dass $\nu(X) \in \mathbb{C}$ und damit $|\nu(X)| < \infty$.

Hausaufgabe 7.2 Sei $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ein endlicher Maßraum. Sei $1 < p < \infty$ und $q = \frac{p}{p-1}$. Für $f \in L^p(X)$ sei

$$L_f : L^q(X) \rightarrow \mathbb{C}, \quad g \mapsto \int_X fg \, \mu.$$

In Präsenzaufgabe 6.1 ist bewiesen worden (sogar ohne die Endlichkeitsbedingung auf μ), dass L_f ein stetiges lineares Funktional auf $L^q(X)$ ist. Ziel dieser Aufgabe ist zu beweisen, dass die Abbildung $\Phi : f \mapsto L_f$ eine Bijektion von $L^p(X)$ auf den Vektorraum $L^q(X)'$ aller stetiger Funktionalen auf $L^q(X)$ ist.

(a) Beweisen Sie, dass die Abbildung Φ injektiv ist.

Betrachten Sie jetzt ein stetiges lineares Funktional T auf $L^q(X)$.

(b) Sei $\nu : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C}$ gegeben durch

$$\nu(A) = T(\mathbf{1}_A).$$

Beweisen Sie, dass ν ein komplexes Maß auf X ist.

(c) Beweisen Sie, dass es eine integrierbare Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ gibt, sodass

$$\nu(A) = \int_A f \mu \quad (A \in \mathcal{M}).$$

Hinweis: Hausaufgabe 7.1.

(d) Beweisen Sie die Identität

$$T(\phi) = \int_X \phi f \mu \quad (\phi \in L^\infty(X)).$$

Hinweis: Zeigen Sie erst die Identität für meßbaren Stufenfunktionen. Zeigen Sie dann, dass es für jede $\phi \in L^\infty(X)$ es eine Folge $(\phi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ meßbarer Stufenfunktionen gibt, sodass ϕ_k in $L^\infty(X)$ gegen ϕ konvergiert. Beweisen Sie, daß ϕ_k auch in $L^q(X)$ gegen ϕ konvergiert.

(e) Sei $n \in \mathbb{N}$. Betrachten Sie

$$E_n := \{x \in X : |f(x)| \leq n\}$$

sowie die Funktion

$$\chi_n : X \rightarrow \mathbb{C}, \quad x \mapsto \begin{cases} \overline{f(x)}|f(x)|^{p-2} & (x \in E_n \text{ und } f(x) \neq 0), \\ 0 & (x \notin E_n \text{ oder } f(x) = 0). \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $\chi_n \in L^\infty(X)$ und

$$\int_{E_n} |f|^p \mu = T(\chi_n) \leq \|T\|_{\text{op}} \left(\int_{E_n} |f|^p \mu \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Folgern Sie, dass $f \in L^p(X)$.

(f) Beweise Sie die Identität $T = \Phi(f)$. Folgern Sie, dass Φ surjektiv ist.