Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Wintersemester 2020 - 2021

Analysis 3

7. Übungsblatt

Ausgewählte Lösungen

Präsenzaufgabe 7.1 Es sei $(X, \mathcal{M})$ ein Messraum sowie μ und ν zwei Maße auf X. Das Maß ν heißt *absolut stetig* bezüglich μ, in Zeichen $\nu \ll \mu$, wenn jede μ -Nullmenge auch eine ν-Nullmenge ist.

(a) Sei $f : X \to R_{\geq 0}$ eine nicht-negative meßbare Funktion. Beweisen Sie, dass

$$\nu : \mathcal{M} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad A \mapsto \int_A f \, \mu$$

ein Mass ist. Beweisen Sie, dass ν absolut stetig bezüglich μ ist.

Ziel dieser Aufgabe ist die Umkehrung dieser Aussage zu beweisen: *der Satz von Radon-Nikodym*. Der Satz lautet wie folgt. Sei μ ein σ-endliches Maß auf dem Messraum $(X, \mathcal{M})$ und sei ν ein σ-endliches Maß, welches absolut stetig bezüglich μ ist. Dann existiert eine nicht-negative messbare Funktion $f : X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, sodass

$$\nu(A) = \int_A f \, \mu \qquad (A \in \mathcal{M}).$$

Ist f' eine weitere Funktion mit dieser Eigenschaft, so stimmt sie μ -fast überall mit f überein.

Nehmen Sie zuerst an, dass μ und ν endliche Maße sind.

(b) Betrachten Sie den Hilbertraum $\mathcal{H} = L^2(X, \mu + \nu)$, sowie die Abbildung

$$I : \mathcal{H} \to \mathbb{R}, \quad \phi \mapsto \int_X \phi \, \mu.$$

Beweisen Sie, dass I ein stetiges lineares Funktional auf $\mathcal{H}$ ist.

(c) Beweisen Sie mit Hilfe von dem Darstellungssatz von Riesz, dass es ein $g \in \mathcal{H}$ gibt, sodass

$$I(\phi) = \int_X g\phi \, (\mu + \nu) \qquad (\phi \in \mathcal{H}).$$

(d) Beweisen Sie, dass μ-fast überall $g > 0$ gilt. Folgern Sie, dass auch ν-fast überall $g > 0$.

(e) Sei $\chi : X \to \mathbb{R}_{>0}$ einen Repräsentanten von g. Betrachten Sie die Abbildung

$$f : X \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1 - \chi(x)}{\chi(x)}.$$

Zeigen Sie, dass f meßbar ist und beweisen Sie die Identität

$$\nu(A) = \int_A f \, \mu \qquad (A \in \mathcal{M}).$$

(f) Beweisen Sie, dass f μ-fast überall nicht-negativ ist.

(g) Beweisen Sie die Eindeutigkeit: Ist f' eine weitere Funktion mit der Eigenschaft

$$\nu(A) = \int_A f' \, \mu \qquad (A \in \mathcal{M}),$$

so stimmt f' μ -fast überall mit f überein.

Jetzt beweisen wir den Satz von Radon-Nikodym im allgemeinen Fall, wobei μ und ν σ-endlich, aber nicht notwendig endlich, sind.

(h) Zeigen Sie, dass es für jede $E \in \mathcal{M}$ mit $\mu(E), \nu(E) < \infty$ eine nicht-negative meßbare Funktion f_E gibt, mit

$$\nu\big|_E(A) = \int_A f_E \, \mu\big|_E \qquad (A \in \mathcal{M}, A \subseteq E).$$

(i) Seien $E_1, E_2 \in \mathcal{M}$ mit $\mu(E_{1,2}), \nu(E_{1,2}) < \infty$. Zeigen Sie

$$f_{E_1}\big|_{E_1 \cap E_2} = f_{E_2}\big|_{E_1 \cap E_2} \quad \mu\big|_{E_1 \cap E_2} - \text{fast überall.}$$

(j) Folgern Sie den Satz von Radon-Nikodym.

Lösung:

(a) Es gilt

$$\nu(\emptyset) = \int_\emptyset f \, \mu = 0$$

Sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von paarweisen disjunkten meßbaren Teilmengen. Die Folge $\left(\mathbf{1}_{\bigcup_{n=1}^N A_n} f\right)_{N \in \mathbb{N}}$ ist aufsteigend. Nach Satz 1.5.12 gilt

$$\begin{aligned}\nu\Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\Big) &= \int_X \lim_{N \to \infty} \mathbf{1}_{\bigcup_{n=1}^N A_n} f \, \mu = \lim_{N \to \infty} \int_X \mathbf{1}_{\bigcup_{n=1}^N A_n} f \, \mu \\ &= \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^N \int_{A_n} f \, \mu = \sum_{n=1}^\infty \nu(A_n).\end{aligned}$$

(b) Offensichtlicht ist I linear. Weiter gilt

$$|I(\phi)| = \left|\int_X \phi \, \mu\right| \leq \int_X |\phi| \, \mu \leq \int_X |\phi| \, (\mu + \nu) = \int_X \mathbf{1}_X |\phi| \, (\mu + \nu)$$

Da $(\mu{+}\nu)(X) < \infty$, ist $\mathbf{1}_X$ quadratisch integrierbar. Nach der Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung (oder Hölder-sche Ungleichung für $p = q = 2$) gilt

$$\int_X \mathbf{1}_X |\phi| \, (\mu + \nu) \leq \|\mathbf{1}_X\| \, \|\phi\|,$$

wobei $\| \cdot \|$ die Norm auf $L^2(X, \mu + \nu)$ bezeichnet. Es folgt, dass I stetig ist.

(c) Da I ein stetiges lineares Funktional auf dem Hilbertraum $L^2(X, \mu + \nu)$. Nach den Satz von Riesz gibt es in $g' \in L^2(X, \mu + \nu)$ sodass

$$I(\phi) = \int_X \overline{g'} \phi (\mu + \nu) \qquad \big(\phi \in L^2(X, \mu + \nu)\big).$$

Die gewünschte Aussage folgt jetzt mit $g = \overline{g'}$.

(d) Für $\phi \in L^2(X, \mu + \nu)$ gilt

$$\int_X \phi\mu = I(\phi) = \int_X g\phi\,(\mu+\nu) = \int_X g\phi\,\mu + \int_X g\phi\,\nu$$

und darum

$$\int_X g\phi\,\nu = \int_X \phi\mu - \int_X g\phi\,\mu = \int_X (1-g)\phi\,\mu. \tag{1}$$

Betrachte jetzt $N = \{x \in X : g(x) \leq 0\}$. Da $1 - g(x) \geq 1$ für $x \in N$, gilt

$$0 \leq \mu(N) \leq \int_X (1-g)\mathbf{1}_N\,\mu = \int_X g\mathbf{1}_N\,\nu = \int_N g\,\nu \leq 0$$

Dies beweist, dass N eine μ-Nullmenge ist. Weil ν absolut stetig bezüglich μ ist, gilt $\nu(N) = 0$. Es folgt, dass μ-fast und ν-fast überall $g > 0$.

(e) Sei $\chi : X \to \mathbb{R}_{>0}$ einen Repräsentanten von g und

$$h : \mathbb{R} > 0 \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1-x}{x}.$$

Dann ist χ meßbar. Die Abbildung h ist stetig und darum auch meßbar. Es folgt, dass $f := h \circ \chi$ meßbar ist. Sei $A \in \mathcal{M}$. Nach (1) gilt

$$\nu(A) = \int_X \mathbf{1}_A\,\nu = \int_X \mathbf{1}_A\chi^{-1}h\,\nu = \int_X \frac{(1-g)}{\chi}\mathbf{1}_A\,\mu = \int_A f\,\mu.$$

(f) Sei ψ einen Repräsentanten von f und

$$A := \{x \in X : \psi(x) < 0\} = \{x \in X : \chi(x) > 1\}.$$

Dann ist $A \in \mathcal{M}$. Zu zeigen ist $\mu(A) = 0$. Bemerke, dass A die Vereinigung der aufsteigende Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$A_n := \big\{x \in X : \chi(x) \geq 1 + \frac{1}{n}\big\}$$

ist. Darum gilt

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Es reicht zu zeigen, dass $\mu(A_n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es gilt

$$\begin{aligned}\mu(A_n) = I\big(\mathbf{1}_{A_n}\big) &= \int_X g\mathbf{1}_{A_n}\,(\mu+\nu) = \int_{A_n} g\,(\mu+\nu) \geq \int_{A_n} g\,\mu \\ &\geq \big(1 + \frac{1}{n}\big)\mu(A_n).\end{aligned}$$

Es folgt $\mu(A_n) = 0$.

Man kann die Funktion f ersetzen durch eine Funktion die überall nicht-negativ ist.

(g) Sei f' eine weitere Funktion mit der Eigenschaft

$$\nu(A) = \int_A f'\,\mu \qquad (A \in \mathcal{M}).$$

Es gilt

$$\int_A (f - f')\,\mu = 0 \qquad (A \in \mathcal{M}).$$

Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir $A_n := \{x \in X : f(x) - f'(x) \geq \frac{1}{n}\}$. Bemerke, dass $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine aufsteigende Folge ist und

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \big\{x \in X : f(x) > f'(x)\big\} =: A.$$

Es gilt

$$0 = \int_{A_n} \big(f(x) - f'(x)\big)\,\mu \geq \frac{1}{n}\mu(A_n). \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Es folgt $\mu(A_n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit $\mu(A) = 0$. Dies beweist, dass μ-fast überall $f \leq f'$. Wenn wir die Rolle von f und f' verwechseln bekommen wir auf gleiche Weise, dass μ-fast überall $f \geq f'$. Es folgt, dass μ-fast überall $f = f'$.

(h) Sei $E \in \mathcal{M}$ mit $\mu(E) = \nu(E) < \infty$. Die Maßen $\mu|_E$ und $\nu|_E$ auf E sind endlich und $\nu|_E$ ist absolut stetig bezüglich $\mu|_E$. Nach (b) – (f) existiert eine nicht-negative messbare Funktion $f_E : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, sodass

$$\nu|_E(A) = \int_A f\,\mu|_E \qquad (A \in \mathcal{M}, A \subseteq E).$$

Ist f'_E eine weitere Funktion mit dieser Eigenschaft, so stimmt sie $\mu|_E$ -fast überall mit f_E überein.

(i) Seien $E_1, E_2 \in \mathcal{M}$ mit $\mu(E_{1,2}), \nu(E_{1,2}) < \infty$. Die Maßen $\mu|_{E_1\cap E_2}$ und $\nu|_{E_1\cap E_2}$ auf $E_1 \cap E_2$ sind endlich und $\nu|_{E_1\cap E_2}$ ist absolut stetig bezüglich $\mu_{E_1\cap E_2}$. Für $A \in \mathcal{M}$ mit $A \subseteq E_1 \cap E_2$ gilt

$$\int_A f_{E_1}\mu = \nu|_{E_1\cap E_2}(A) = \int_A f_{E_2}\mu$$

Nach g gilt $\mu|_{E_1\cap E_2}$-fast überall $f_{E_1}|_{E_1\cap E_2} = f_{E_2}|_{E_1\cap E_2}$.

(j) Weil μ und ν beide σ-endlich sind, gibt es Folgen $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von meßbare Mengen, sodass $\mu(E_n), \nu(F_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und

$$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n.$$

Wir setzen $G_{m,n} = E_m \cap F_n$. Dann gilt $\mu(G_{m,n}), \nu(G_{m,n}) < \infty$ und

$$\bigcup_{m,n\in\mathbb{N}} G_{m,n} = X.$$

Nach (g) existiert für alle $m, n \in \mathbb{N}$ eine nicht-negative messbare Funktion $f_{m,n} : G_{m,n} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, sodass

$$\nu|_{G_{m,n}}(A) = \int_A f_{m,n}\,\mu|_{G_{m,n}} \qquad (A \in \mathcal{M}, A \subseteq G_{m,n}).$$

Die Eindeutigkeitsaussage aus (h) zeigt, dass es ein μ-fast überall definierte Funktion $f : X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, sodass für alle $m, n \in \mathbb{N}$ $\mu|_{G_{m,n}}$-fast überall $f|_{G_{m,n}} = f_{m,n}$. Die Maße ν und $\mathcal{M} \ni A \mapsto \int_A f\,\mu$ sind gleich auf alle Mengen $G_{m,n}$ mit $m, n \in \mathbb{N}$. Nach Hausaufgabe 2.1 sind die beide Maße gleich.