Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Wintersemester 2020 - 2021

Analysis 3

8. Übungsblatt

Ausgewählte Lösungen

Hausaufgabe 8.2 [Forster Aufgabe 18.2] Im $\mathbb{R}^3$ sei α die Kurve $\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$, gegeben durch

$$\alpha(t) := \left(e^{t \sin t}, t^2 - 2\pi t, \cos \frac{t}{2}\right) \qquad (t \in [0, 2\pi]).$$

Man berechne die Integrale

$$\int_\alpha (x\, dx + y\, dy + z\, dz) \quad \text{und} \quad \int_\alpha z\, dy.$$

Lösung: Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$f(x, y, z) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) \qquad (x, y, z \in \mathbb{R}).$$

Dann

$$df(x, y, z) = x\, dx + y\, dy + z\, dz \qquad (x, y, z \in \mathbb{R}).$$

Nach Forster §18, Satz 1 gilt

$$\int_\alpha \big(x\, dx + y\, dy + z\, dz\big) = f\big(\alpha(2\pi)\big) - f\big(\alpha(0)\big) = f(1, 0, -1) - f(1, 0, 1) = 0.$$

Weiter gilt

$$\int_\alpha z\, dy = \int_0^{2\pi} \cos\big(\frac{t}{2}\big)(2t - 2\pi)\, dt = -16.$$

Hausaufgabe 8.4 [Forster Aufgabe 18.4] Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, $a \in U$ und $\omega = f\, dx + g\, dy$ eine in $U \setminus \{a\}$ stetig differenzierbare geschlossene Pfaffsche Form, deren Koeffizienten f und g beschränkte Funktionen seien. Man beweise, dass ω eine Stammfunktion $F : U \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ besitzt, die sich stetig nach U fortsetzen lässt.

Lösung: Wir behaupten, dass $I(\gamma) := \int_\gamma (f\, dx + g\, dy) = 0$ für alle geschlossene Kurven γ in $U \setminus \{a\}$. Wenn γ nullhomotop in $U \setminus \{a\}$ ist, dann gilt $I(\gamma) = 0$ nach Satz 6 in Forster Analysis 3, §18. Sei $\gamma : [a, b] \to U \setminus \{a\}$ eine geschlossene Kurve die nicht nullhomotop in $U \setminus \{a\}$ ist. Wenn $r > 0$ hinreichend klein ist, ist

$$B_r := \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x - a\| \leq r\}$$

ganz erhalten in U. Da U einfach zusammenhängend ist, ist γ homotop in $U \setminus \{a\}$ zu eine Kurve in $B_r \setminus \{a\}$. Nach Satz 5 in §18 dürven wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit U ersetzen durch B_r. Für $0 < \epsilon < 1$ definieren wir die Kurve

$$\gamma_\epsilon : [a, b] \to B_r \setminus \{a\}, \quad t \mapsto \epsilon\gamma(t) + (1 - \epsilon)a.$$

Dann ist γ_ϵ homotop zu γ und darum gilt $I(\gamma_\epsilon) = I(\gamma)$ nach Satz 5. Da

$$\begin{aligned}\left|\int_{\gamma_\epsilon} (f\,dx + g\,dy)\right| &= \epsilon\left|\int_a^b \Big(f\big(\gamma_\epsilon(t)\big)\gamma_1'(t) + g\big(\gamma_\epsilon(t)\big)\gamma_2'(t)\Big)\,dt\right| \\ &\le \epsilon\|f\|_\infty \int_a^b |\gamma_1'(t)|\,dt + \epsilon\|g\|_\infty \int_a^b |\gamma_2'(t)|\,dt\end{aligned}$$

gilt $I(\gamma) = \lim_{\epsilon\downarrow 0} I(\gamma_\epsilon) = 0$. Dies beweist die Behauptung.

Nach Satz 3 in Forster besitzt f dx+g dy eine Stammfunktion $F : U \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$. Es ist noch zu zeigen, dass F sich stetig nach U fortsetzten läßt.

Sei $b \in U \setminus \{a\}$ und sei $\alpha : [0,1] \to U$ eine Kurve mit $\alpha(t) \in U \setminus \{a\}$ für $t \in (0,1)$, $\alpha(0) = b$ und $\alpha(1) = a$. Wenn $0 < s_1 < s_2 < 1$, dann gilt nach Forster, §18, Satz 1

$$\begin{aligned}\big|F\big(\alpha(s_1)\big) - F\big(\alpha(s_2)\big)\big| &\le \left|\int_{s_1}^{s_2} \Big(f\big(\alpha(t)\big)\alpha_1'(t) + g\big(\alpha(t)\big)\alpha_2'(t)\Big)\,dt\right| \\ &\le (s_2 - s_1)\big(\|f\|_\infty + \|g\|_\infty\big) \sup_{t\in[0,1]} \|\alpha'(t)\|.\end{aligned} \tag{1}$$

Sei $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge ist mit $\lim_{n\to\infty} s_n = 1$. Es folgt aus (1), dass $\big(F\big(\alpha(s_n)\big)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge und damit konvergent ist. Wir behaupten, dass F sich stetig nach U fortsetzen läßt durch $F(a) := \lim_{n\to\infty} \big(F\big(\alpha(s_n)\big)\big)$ zu stellen.

Sei $\epsilon > 0$ und sei $\delta > 0$ mit

$$\delta < \frac{\epsilon}{6\big(\|f\|_\infty + \|g\|_\infty\big)}.$$

Sei $x \in U$ mit $\|x - a\| < \delta$ und sei $n \in \mathbb{N}$ mit $|F(a) - F\big(\alpha(s_n)\big)| < \frac{\epsilon}{2}$ und $\|\alpha(s_n) - a\| < \delta$. Sei $\gamma : [0,1] \to B_\delta \setminus \{a\}$ eine Kurve mit $\gamma(0) = \alpha(s_n)$ und $\gamma(1) = x$. Weil $\|x - \alpha(s_n)\| \le 2\delta$, kann γ so gewählt werden, dass

$$\int_0^1 \|\gamma'(t)\|\,dt < 3\delta.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}|F(x) - F(a)| &= |F(x) - F\big(\alpha(s_n)\big) + F\big(\alpha(s_n)\big) - F(a)| \\ &= |F(x) - F\big(\alpha(s_n)\big)| + |F\big(\alpha(s_n)\big) - F(a)| \\ &= \left|\int_\gamma \big(f\,dx + g\,dy\big)\right| + |F\big(\alpha(s_n)\big) - F(a)| \\ &\le \big(\|f\|_\infty + \|g\|_\infty\big) \int_0^1 \|\gamma'(t)\|\,dt + \frac{\epsilon}{2} \\ &< \epsilon.\end{aligned}$$

Es folgt, dass F stetig ist.