Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Wintersemester 2020 - 2021

Analysis 3

9. Übungsblatt

Ausgewählte Lösungen

Präsenzaufgabe 9.1 Gegeben sei ein orientierter n-dimensionaler reeller Vektorraum V mit einer nichtausgearteten symmetrischen Bilinearform t. Für eine orientierte Basis $v_1, \ldots, v_n$ mit

$$|t(v_i, v_j)| = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ 1, & (i = j), \end{cases}$$

sei

$$\omega = \omega_t := v_1 \wedge \cdots \wedge v_n$$

Man erklärt für jedes $0 \leq p \leq n$ den Hodge-$*$-Operator

$$* = *_t : \bigwedge^p V \to \bigwedge^{n-p} V$$

durch die Formel

$$\alpha \wedge *\beta = t(\alpha, \beta)\omega \qquad \big(\alpha, \beta \in \bigwedge^p V\big).$$

Hier ist t rechts zu verstehen als die Erweiterung der Bilinearform t auf p-Formen durch

$$t\big(w_1 \wedge \cdots \wedge w_p, w_1' \wedge \cdots \wedge w_p'\big) := \det \begin{pmatrix} t(w_1, w_1') & t(w_1, w_2') & \ldots & t(w_1, w_p') \\ t(w_2, w_1') & t(w_2, w_2') & \ldots & t(w_2, w_p') \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t(w_p, w_1') & t(w_p, w_2') & \ldots & t(w_p, w_p') \end{pmatrix},$$

für alle $w_1, \ldots, w_p, w_1', \ldots w_p' \in V$.

(b) Beweisen Sie, dass der Hodge-$*$-Operator ein linearer Isomorphismus $\bigwedge^p V \to \bigwedge^{n-p} V$ ist.

(c) Zeigen Sie unter Annahme, dass t ein Skalarprodukt auf V ist, dass der Hodge-$*$-Operator die lineare Abbildung $* : \bigwedge^p V \to \bigwedge^{n-p} V$ ist, die bestimmt wird durch

$$*\big(v_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge v_{\sigma(p)}\big) = \operatorname{sign}(\sigma) v_{\sigma(p+1)} \wedge \cdots \wedge v_{\sigma(n)} \qquad (\sigma \in S_n).$$

Zeigen Sie weiter, dass $*(*\alpha) = (-1)^{p(n-p)}\alpha$ für alle $\alpha \in \bigwedge^p V$.

Betrachten Sie eine offene Teilmenge U von $\mathbb{R}^n$. Für jede $p \in U$ versehen wir $T_p(U)^*$ mit dem standard Euklidischen Skalarprodukt. Wir definieren $d^* := * \circ d \circ *$ und den Hodge-Laplace-Operator

$$\Delta := d \circ d^* + d^* \circ d$$

(d) Zeigen Sie, dass Δ p-Formen auf p-Formen schickt. Sei $f : U \to \mathbb{R}$ eine C^2-Funktion. Beweisen Sie die Identität

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \partial_i^2 f.$$

Lösung:

(b) Für $I \subseteq \{0, \dots, n\}$ definieren wir

$$v_I = v_{a_1} \wedge \cdots \wedge v_{a_m},$$

falls $I = \{a_1, \dots, a_m\}$ mit $a_1 < a_2 < \cdots < a_m$. Wir schreiben I^c für $\{1, \dots, n\} \setminus I$. Wenn $I \neq J$, dann $I \cap J^c \neq \emptyset$ und damit $v_I \wedge v_{J^c} = 0$. Weiter gilt $v_I \wedge v_{I^c} = \operatorname{sign}(\sigma_I)\omega$ wobei $\sigma_I \in S_n$ die Permutation gegeben durch

$$\sigma_I(i) = \begin{cases} a_i & 1 \leq i \leq |I| \\ b_{i-|I|}, & |I| + 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

ist, wobei $a_1 < a_2 < \cdots < a_{|I|}$ die Element aus I und $b_1 < \cdots < b_{n-|I|}$ die Elementen aus I^c sind. Wir haben jetzt die Identität

$$v_I \wedge v_{J^c} = \begin{cases} \operatorname{sign}(\sigma_I)\omega & (I = J) \\ 0 & (I \neq J) \end{cases} \tag{1}$$

für $I, J \subseteq \{1, \dots, n\}$ mit $|I| = |J| = p$ bewiesen.

Wir behaupten, dass die Abbildung

$$\bigwedge^p V \times \bigwedge^{n-p} V \to \bigwedge^n V, \quad (\alpha, \beta) \mapsto \alpha \wedge \beta \tag{2}$$

nicht ausgeartet ist, d. h. es gibt für jede $\alpha \in \bigwedge^p V \setminus \{0\}$ ein $\beta \in \bigwedge^{n-p}$ und für jede $\beta \in \bigwedge^{n-p} V \setminus \{0\}$ ein $\alpha \in \bigwedge^p V$ mit $\alpha \wedge \beta \neq 0$. Wenn $\alpha \in \bigwedge^p V$, dann ist α eine Linearkombination der vektoren v_I mit $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ mit $|I| = p$. Darum können wir α schreiben als

$$\alpha = \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, n\} \\ |I| = p}} c_I v_I.$$

Wenn $c_{I_0} \neq 0$, dann folgt

$$\alpha \wedge v_{I_0^c} = c_{I_0} v_{I_0} \wedge v_{I_0^c} = \operatorname{sign}(\sigma_{I_0}) c_{I_0} \neq 0.$$

Dies beweist die Behauptung, dass (2) nicht ausgeartet ist.

Weil (2) nicht ausgeartet ist, hat für jede $\ell \in (\bigwedge^p)^*$ die Gleichung

$$\alpha \wedge \beta = \ell(\alpha)\omega \qquad \big(\alpha \in \bigwedge^p (V)\big)$$

genau eine Lösung $\beta \in \bigwedge^{n-p} V$.

Wenn $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ und $I = \{a_1, \dots, a_p\}$ mit $a_1 < a_2 < \cdots < a_p$, dann gilt

$$\begin{aligned} t(v_I, v_I) &= \det \begin{pmatrix} t(v_{a_1}, v_{a_1} & t(v_{a_1}, v_{a_2}) & \dots & t(v_{a_1}, v_{a_p}) \\ t(v_{a_2}, v_{a_1}) & t(v_{a_2}, v_{a_2}) & \dots & t(v_{a_2}, v_{a_p}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t(v_{a_p}, v_{a_1}) & t(v_{a_p}, v_{a_2}) & \dots & t(v_{a_p}, v_{a_p}) \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} t(v_{a_1}, v_{a_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & t(v_{a_2}, v_{a_2}) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & t(v_{a_p}, v_{a_p}) \end{pmatrix} \\ &= \prod_{i=1}^p t(v_{a_i} v_{a_i}). \end{aligned}$$

Weil $|t(v_{a_i} v_{a_i})| = 1$, ist die rechte Seite gleich ± 1.

Wenn $I, J \subseteq \{1, \ldots, n\}$ mit $|I| = |J| = p$ und $I \neq J$, dan gibt es ein $a \in I \setminus J$. Da $t(v_a, v_b) = 0$ für alle $b \in J$, gibt es eine Nullspalte in die Matrix

$$\begin{pmatrix} t(v_{a_1}, v_{b_1} & t(v_{a_1}, v_{b_2}) & \ldots & t(v_{a_1}, v_{b_p}) \\ t(v_{a_2}, v_{b_1}) & t(v_{a_2}, v_{b_2}) & \ldots & t(v_{a_2}, v_{b_p}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t(v_{a_p}, v_{b_1}) & t(v_{a_p}, v_{b_2}) & \ldots & t(v_{a_p}, v_{b_p}) \end{pmatrix},$$

wobei $a_1 < \cdots < a_p$ und $b_1 < \cdots < b_p$ die Elementen aus I und J sind. Die Determinante dieser Matrix ist darum gleich 0. Wir haben jetzt die Identität

$$t(v_I, v_J) = \begin{cases} \prod_{i=1}^{p} t(v_{a_i} v_{a_i}) & (I = J) \\ 0 & (I \neq J) \end{cases} \tag{3}$$

für $I, J \subseteq \{1, \ldots, n\}$ mit $|I| = |J| = p$ bewiesen.

Aus (1) und (3) folgt, dass für $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ mit $I = \{a_1, \ldots a_p\}$ und $a_1 < \cdots < a_p$,

$$*v_I = \operatorname{sign}(\sigma_I) \Big(\prod_{i=1}^{p} t(v_{a_i}, v_{a_i}) \Big) v_{I^c} = \pm v_{I^c} \tag{4}$$

Da die Vektoren v_I mit $I \subseteq \{1, \ldots, m\}$ und $|I| = m$ eine Basis von $\bigwedge^m V$ formen, bildet $*$ eine Basis von $\bigwedge^p V$ auf eine Basis von $\bigwedge^{n-p} V$ ab. Es folgt, dass $*$ ein Isomorphismus $\bigwedge^p V \to \bigwedge^{n-p} V$ ist.

(c) Wenn t ein Skalarprodukt ist, dann gilt $t(v_i, v_i) = 1$ für alle $1 \leq i \leq n$. Nach (4) gilt

$$*v_I = \operatorname{sign}(\sigma_I) v_{I^c}.$$

Für jede $\sigma \in S_n$ gibt es $\tau_1 \in S_p$ und $\tau_2 \in S_{n-p}$, sodass

$$\sigma(i) = \begin{cases} \sigma_I\big(\tau_1(i)\big) & (1 \leq i \leq p) \\ \sigma_I\big(p + \tau_2(i-p)\big) & (p+1 \leq i \leq n). \end{cases}$$

wobei $I = \{\sigma(i) : 1 \leq i \leq p\}$. Es gilt $\operatorname{sign}(\sigma) = \operatorname{sign}(\sigma_I)\operatorname{sign}(\tau_1)\operatorname{sign}(\tau_2)$ und

$$v_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge v_{\sigma(p)} = \operatorname{sign}(\tau_1) v_I \quad \text{und} \quad v_{\sigma(p+1)} \wedge \cdots \wedge v_{\sigma(n)} = \operatorname{sign}(\tau_2) v_{I^c}.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} *\big(v_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge v_{\sigma(p)}\big) &= \operatorname{sign}(\tau_1) * v_I = \operatorname{sign}(\tau_1)\operatorname{sign}(v_I) v_{I^c} = \operatorname{sign}(\tau_2) v_{I^c} \\ &= \operatorname{sign}(\sigma) v_{\sigma(p+1)} \wedge \cdots \wedge v_{\sigma(n)} \end{aligned}$$

Sei $\sigma_p \in S_n$ gegeben durch

$$\sigma_p(i) = \begin{cases} i + p & (1 \leq i \leq n-p) \\ i - n + p & (n-p+1 \leq i \leq n). \end{cases}$$

Dann $\sigma_{I^c} = \sigma_I \circ \sigma_p$ für alle $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ mit $|I| = p$. Bemerke, dass $\operatorname{sign}(\sigma_p) = (-1)^{p(n-p)}$. Darum gilt

$$\begin{aligned} *(*v_I) &= *\big(\operatorname{sign}(\sigma_I) v_{I^c}\big) = \operatorname{sign}(\sigma_I) * v_{I^c} = \operatorname{sign}(\sigma_I)\operatorname{sign}(\sigma_{I_c}) v_I \\ &= \operatorname{sign}(\sigma_p) v_I = (-1)^{p(n-p)} v_I. \end{aligned}$$

Weil die Vektoren v_I mit $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ und $|I| = p$ eine Basis von $\bigwedge^p V$ bilden, folgt dass $* \circ *$ und Multiplikation mit $(-1)^{p(n-p)}$ auf $\bigwedge^p V$ gleich sind.

(d) Da $*$ p-Formen auf $n-p$-Formen und $(n-p+1)$-Formen auf $p-1$-Formen abbildet, folgt, dass d^* p-Formen auf $(p-1)$-Formen abbildet. Weil d p-Formen auf $p+1$-Formen abbildet, folgt, dass Δ p-Formen auf p-Formen abbildet.

Sei $f : U \to \mathbb{R}$ eine C^2-Funktion. Weil $d^* f$ eine -1-Form ist, ist sie 0. Es folgt

$$\Delta f = d^*(df) = d^*\Big(\sum_{i=1}^n \partial_i f\, dx_i\Big)$$

Nach (c) gilt

$$*dx_i = (-1)^{i+1} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
\Delta f &= *d\Big(\sum_{i=1}^n (-1)^{n+1} \partial_i f\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \cdots \wedge dx_n\Big) \\
&= *\Big(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \partial_j \partial_i f\, dx_j \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \cdots \wedge dx_n\Big) \\
&= *\Big(\sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \partial_i f\, dx_i \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \cdots \wedge dx_n\Big) \\
&= *\Big(\sum_{i=1}^n \partial_i^2 f\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n\Big)
\end{aligned}$$

Nach (c) ist die rechte Seite gleich $\sum_{i=1}^n \partial_i^2 f$.