

Lineare Algebra 1: Klausur 2

Bitte füllen Sie zunächst das Deckblatt sorgfältig aus und lesen Sie die folgenden Hinweise.

Nachname:	
Vorname:	
Matrikel-Nummer:	
Studiengang:	

1. Bitte legen Sie **Studierendenausweis** (Matrikel-Nummer) und ggf. **Lichtbildausweis** zur Kontrolle auf dem Tisch bereit. Bitte schalten Sie ihr **Handy** still/aus und legen es außer Reichweite ab.
2. Erlaubte **Hilfsmittel** sind lediglich Schreibutensilien (kein Rotstift, kein Bleistift).
3. Bitte melden Sie sich (Handzeichen), falls Sie eine Textformulierung nicht verstehen oder **zusätzliches Papier** für die Bearbeitung einer Aufgabe benötigen. Versehen Sie zusätzliches Papier immer mit Ihrem Namen und der Nummer der entsprechenden Aufgabe.
4. Wenn sich ein **numerisches Ergebnis** ohne Taschenrechner nicht weiter vereinfachen lässt, so können Sie es unvereinfacht stehen lassen (z.B. $\frac{0.789}{592}$ oder $\cos(94^\circ)$).
5. Alle Ergebnisse und Rechenschritte sind zu begründen, sofern nicht anders vermerkt.
6. Die geplante Bearbeitungszeit beträgt **120 Minuten**.

Aufgabe	1	2	3	4	5	Summe
Punkte						
erreichbare Punkte	30	20	25	10	15	100

Aufgabe 1 (30 Punkte) (i) Sei V der Vektorraum der (2×2) -Matrizen über $\mathbb{R}$. Bestimme die Darstellungsmatrix $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(g)$ von

$$g: V \rightarrow V, \quad A \mapsto {}^t A + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot A$$

bezüglich der Basis

$$\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right).$$

(ii) Bestimme alle Matrizen A mit $g(A) = B$, wobei

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2 (20 Punkte) (i) Sei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -3 \\ 14 & -20 & -23 \\ -12 & 18 & 21 \end{pmatrix}.$$

Bestimme das charakteristische Polynom und die Eigenwerte von A über $\mathbb{R}$.

(ii) Sei

$$B = \begin{pmatrix} 8 & -9 & -9 \\ 18 & -25 & -27 \\ -12 & 18 & 20 \end{pmatrix}.$$

Ein Eigenwert von B über $\mathbb{R}$ ist -1. Berechne den zugehörigen Eigenraum.

Aufgabe 3 (25 Punkte) Sei V ein n -dimensionaler Vektorraum über einem Körper K und $v_1, \dots, v_n$ eine Basis von V .

- (i) Begründe, dass es für ein festes $k = 1, \dots, n$ eine lineare Abbildung $\varphi_k: V \rightarrow K$ mit $\varphi_k(v_k) = 1$ und $\varphi_k(v_l) = 0$ für $k \neq l$ gibt.
- (ii) Zeige, dass $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ linear unabhängig im Vektorraum

$$W := \{f: V \rightarrow K \mid f \text{ linear}\}$$

sind.

- (iii) Zeige, dass $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ den Vektorraum W erzeugen.

Aufgabe 4 (10 Punkte) Sei N eine nilpotente Matrix, d.h. N ist eine quadratische Matrix über einem Körper K mit $N^r = 0$ für ein $r \in \mathbb{N}$. Zeige, dass $I - N$ invertierbar ist, wobei I die Einheitsmatrix bezeichnet.

Aufgabe 5 (15 Punkte) Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch? Begründe deine Antwort.

- (i) Seien A und B quadratische Diagonalmatrizen. Es gilt $\det(AB) = \det(BA)$ genau dann, wenn $AB = BA$.
- (ii) Für jedes Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf einem Vektorraum V und jede Teilmenge X von V ist $X^\perp = (\text{span } X)^\perp$.
- (iii) Für jedes $n \geq 2$ ist $W := \{A \in \text{Mat}(n \times n, K) \mid \det A = 0\}$ ein Untervektorraum des Vektorraums $\text{Mat}(n \times n, K)$ aller $(n \times n)$ -Matrizen über dem Körper K .

