12. Übungsblatt - Lie-Gruppen 2

Besprechung am 21.01.2022

Aufgabe 1 Sei G eine kompakte zusammenhängende Lie-Gruppe, T ein maximaler Torus in G, W die Weyl-Gruppe bezüglich T und $f \in C(G)$. Zeigen Sie, dass die Weyl-Integrationsformel gilt:

$$\int_G f(g)df = \frac{1}{|W|}\int_T \left(\det(\mathrm{Id}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{t}} - \mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{t}}(t^{-1}))\int_G f(gtg^{-1})dg\right)dt.$$

Sei nun zusätzlich das Weyl-Element bezüglich eines positiven Systems analytisch integral. Wir nennen $D(t) = \xi_\delta \prod_{\alpha\in\Delta^+}(1-\xi_{-\alpha}(t))$ den Weyl-Nenner (ξ_μ ist der Charakter von T mit Differential μ.) Zeigen sie die Identität $|D(t)|^2 = \det(\mathrm{Id}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{t}} - \mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{t}}(t^{-1}))$.

Ein Beweis der Weyl Integrationsformel findet sich zum Beispiel im Buch "Representations of Compact Lie Groups" von Theodor Bröcker und Tammo tom Dieck S. 163 (siehe Springerlink). Wir werden den Beweis nur skizzieren und die relevanten Schritte diskutieren, da wir die Integralformel nur in einem Schritt im Beweis der Charakterformel benötigen werden.

Aufgabe 2 Sei G eine kompakte, einfach zusammenhängende halbeinfache Lie-Gruppe und T ein maximaler Torus in G. Fixiere ein positives System von Wurzeln $\Delta^+ \subset \Delta$ und sei δ das zugehörige Weyl-Element. In dieser Aufgabe wollen wir zeigen, dass für eine irreduzible endlich dimensionale Darstellung π_λ von G mit höchstem Gewicht λ, der Charakter χ_λ von π_λ gegeben ist durch die folgende Formel:

$$\chi_\lambda(t) = D(t)^{-1}\sum_{w\in W}(\det w)\xi_{w(\lambda+\delta)}(t) \qquad (t \in T).$$

Hierbei ist $D(t)$ der Weyl-Nenner aus Aufgabe 1, W die Weyl-Gruppe von G bezüglich T und ξ_μ den Charakter von T mit Differential μ.

(a) Sei $R(T)$ der Ring der $\mathbb{Z}$-Linearkombinationen von Charakteren von T. Dann opereriert W auf $R(T)$ durch $(w.f)(t) = f(w^{-1}.t)$. Ein $f \in R(T)$ heißt gerade, falls $w.f = f$ für alle $w \in W$ und ungerade falls $w.f = \det(w)f$ für alle $w \in W$. Zeigen Sie, dass $\chi_\lambda D$ in $R(T)$ liegt und ungerade ist.

(b) Da $\chi_\lambda D$ in $R(T)$ liegt, existieren $n_\mu \in \mathbb{Z}$ ($\mu \in i\mathfrak{t}'$) fast alle Null, sodass

$$\chi_\lambda(t)D(t) = \sum_\mu n_\mu \xi_\mu(t). \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass $n_\mu = 0$ für alle μ für die ein $\alpha \in \Delta$ existiert, sodass $\langle \mu, \alpha \rangle = 0$. Hierfür wenden Sie $w \in W$ auf Gleichung (1) in Zusammenhang mit (a) an, summieren über alle $w \in W$ und machen anschließend einen Koeffizientenvergleich um die Gleichung

$$n_{w^{-1}.\mu} \det(w) = n_\mu \qquad (\mu \in i\mathfrak{t}', w \in W) \tag{2}$$

zu erhalten.

(c) Sei $C^+ = \{\mu \in i\mathfrak{t}' : \langle \mu, \alpha \rangle > 0 \ \forall \alpha \in \Delta^+\}$. Zeigen Sie die Formel

$$\chi_\lambda(t)D(t) = \sum_{\mu \in C^+} n_\mu \left(\sum_{w \in W} (\det w) \xi_{w.\mu} \right)(t). \tag{3}$$

(d) Zeigen Sie mit der Weylschen Integralformel aus Aufgabe 1 die Formel

$$\frac{1}{|W|} \int_T |\chi_\lambda(t)D(t)|^2 dt = 1. \tag{4}$$

(e) Folgern Sie aus Gleichung (3) und (4) die Gleichung

$$\chi_\lambda D = \pm \sum_{w \in W} (\det w) \xi_{w.\mu}$$

für ein $\mu \in C^+$. Folgern Sie durch Koeffizientenvergleich, dass das Vorzeichen positiv sein muss und $\mu = \lambda + \delta$ ist.