4. Übungsblatt - Lie-Gruppen 2

Besprechung am 05.11.2021

Aufgabe 1 Zeigen Sie, dass eine Lie-Algebra L genau dann auflösbar ist, falls es eine Kette

$$L = L_0 \supset L_1 \supset L_2 \supset \cdots \supset L_k = 0$$

von Unteralgebren von L existiert, sodass L_{i+1} ein Ideal in L_i ist und L_i/L_{i+1} abelsch ist für alle $i = 0, \ldots, k-1$.

Aufgabe 2 Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{K})$ und $\mathfrak{g}_{\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}}$ die 3-dimensionale Lie-Algebra mit Basis X, Y, Z und den Lie-Relationen

$$\begin{aligned} [X, Y] &= 0 \\ [X, Z] &= \alpha X + \beta Y \\ [Y, Z] &= \gamma X + \delta Y. \end{aligned}$$

(a) Zeige, dass $\mathfrak{g}_{\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}}$ tatsächlich eine Lie-Algebra ist. Hinweis: Betrachte zum Beispiel die lineare Abbildung geg. durch $X \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $Y \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $Z \mapsto -\begin{pmatrix} \alpha & \gamma & 0 \\ \beta & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(b) Zeige, dass $\mathfrak{g}_{\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}}$ auflösbar aber nicht nilpotent ist.

(c) Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Zeige, dass $\mathfrak{g}_{\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$ nicht isomorph zu $\mathfrak{g}_{\begin{pmatrix} \alpha' & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$ ist, wenn $\alpha, \alpha' \in \mathbb{R}_{>1}$ und $\alpha \neq \alpha'$. (Damit gibt es überabzählbar viele nicht zueinander isomorphe auflösbare 3-dimensionale reelle Lie-Algebren.

Aufgabe 3 Sei $\mathfrak{g}$ eine reelle Lie-Algebra komplexer Matrizen mit der Eigenschaft

$$X \in \mathfrak{g} - \{0\} \Rightarrow iX \notin \mathfrak{g}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ als komplexe Lie-Algebra komplexer Matrizen realisiert werden kann.

Aufgabe 4 Sei $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ und B die Killingform von $\mathfrak{g}$. Zeigen Sie, dass ein $c \in \mathbb{K}$ existiert mit $B(X,X) = c\det(X)$ für alle $X \in \mathfrak{g}$.

Aufgabe 5 In $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$ existiert ein $c_n \in \mathbb{R}$, sodass $B(X,Y) = c_n \mathrm{tr}(XY)$ für alle $X, Y \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ gilt. Berechnen Sie c_n.

Aufgabe 6 Bestimmen Sie bis auf Isomorphie alle Lie-Algebren von Dimension ≤ 2.