

## 5. Übungsblatt - Lie-Gruppen 2

Besprechung am 12.11.2021

**Aufgabe 1** Aufgabe 39 aus dem Aufgabenkatalog von Erik van den Ban.

**Aufgabe 2** Sei  $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(5, \mathbb{R})$ .

(a) Zeige, dass  $\mathfrak{t} = \left\{ \begin{pmatrix} X & 0 & 0 \\ 0 & Y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{gl}(5, \mathbb{R}) : X, Y \in \mathfrak{so}(2, \mathbb{R}) \right\}$  ein maximaler Torus in  $\mathfrak{so}(5, \mathbb{R})$  ist.

(b) Bestimmen Sie die Wurzelraumzerlegung und das Wurzelsystem  $\Sigma$  des maximalen Torus  $\mathfrak{t}$  in  $\mathfrak{so}(5, \mathbb{C})$ .

(c) Sei  $\Sigma'$  eine Teilmenge von  $\Sigma$  mit der Eigenschaft

$$\alpha, \beta \in \Sigma' \wedge \alpha + \beta \in \Sigma \Rightarrow \alpha + \beta \in \Sigma'.$$

Zeigen Sie, dass dann  $\mathfrak{g}'_{\mathbb{C}} = \mathfrak{t}_{\mathbb{C}} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Sigma'} \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\alpha}$  eine Lie-Unteralgebra ist.

(d) Geben Sie ein Beispiel einer Teilmenge  $\Sigma' \subset \Sigma$ , sodass

$$\mathfrak{g}'_{\mathbb{C}} = \mathfrak{t}_{\mathbb{C}} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Sigma'} \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\alpha}$$

keine Unteralgebra von  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$  ist.